数理解析研究所講究録
74巻 1969年 124-129



# Banach空間に値をとるマルチンゲールの収束

九州大 工 渡辺寿夫

(本尾実記)

parametre space は普通の linear set で、state space が Banach空間であるようなマルチンゲールについて述べる。

## §1. Introduction.

確率空間$(\Omega, \mathcal{B}, P)$上の、Banach空間$\mathfrak{X}$に値をとる、確率変数$x(\omega)$の条件附平均値に関し次の結果が成立する。

「定理」 $x(\omega)$を強可測、Bochner可積分とする。$\mathfrak{F}$を$\mathcal{B}$のsub-$\sigma$-fieldとすると、次の性質をもつ確率変数$\mathcal{E}^s(x|\mathfrak{F})$が(同値を除いて)一意に存在する。

(1) $\mathcal{E}^s(x|\mathfrak{F})$は$\mathfrak{F}$-強可測.

(2) $\mathcal{E}^s(x|\mathfrak{F})$はBochner可積分.

(3) 全ての$\Lambda\in\mathfrak{F}$に対して $\int_\Lambda x(\omega)dP = \int_\Lambda \mathcal{E}^s(x|\mathfrak{F})dP$
が成立する。

$T$ を linear set とし $\{x_\tau(\omega)\}_{\tau\in T}$ を $\mathfrak{X}$-valued な確率過程 $\{\mathfrak{F}_\tau\}_{\tau\in T}$ を $t$ について単調増加な $\mathfrak{B}$ の sub-$\sigma$-field の系とする。$x_\tau(\omega)$ が $\mathfrak{F}_\tau$-強可測, Bochner 可積分な確率過程であって,

$$P\left(\mathcal{E}^s(x_\tau \mid \mathfrak{F}_\sigma) = x_\sigma\right) = 1 \qquad (\sigma \leqq \tau)$$

が成立するとき, $\{x_\tau\}_{\tau\in T}$ をマルチンゲールという。

セミマルチンゲールを定義するためには, $\mathfrak{X}$ に半順序が定義されている必要がある。$\mathcal{Y}$ を positive cone $R$ を有する Banach 空間とするとき, 次の条件をみたす $(y_\tau, \mathfrak{F}_\tau)_{\tau\in T}$ をセミマルチンゲールという。

(1) $y_\tau$ は $\mathfrak{F}_\tau$-強可測

(2) $y_\tau$ は Bochner 可積分

(3) $P\left(\mathcal{E}^s(y_\tau \mid \mathfrak{F}_\sigma) \geqq y_\sigma\right) = 1 \qquad (\sigma \leqq \tau)$

但し $x \geqq y$ は $x - y \in R$ を意味する。

## §2. Convergence theorem

$\{x_n, \mathfrak{F}_n\}_{n\geqq 1}$ を $\mathfrak{X}$-valued マルチンゲールとする。

「定理」(Scalora [1])

$\mathfrak{X}$ が reflexive のとき, 強可測な確率変数 $x_\infty(\omega)$ が存在し, 全ての $f \in \mathfrak{X}^*$ に対して

$$P\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)\right) = 1$$

が成立する。

これより更に強く，次の結果が知られている。

「定理」（A. and C. Ionescu Tulcea [2]）

前定理と同じ条件の下で，$\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$－強可測な確率変数 $x_\infty(\omega)$ が存在し　$P(\|x_n(\omega) - x_\infty(\omega)\| \to 0 \ (n \to \infty)) = 1$
が成立する。

$\mathfrak{X}$ が reflexive という条件は外せない。$\mathfrak{X}$ が reflexive でないとき上の定理が成立しない反例は Chatterji [3] に与えられている。$\mathfrak{X}$ が reflexive でないときも次の形の収束定理が成立する。~~定~~

「定理」（Neveu [4]）　$z$ を強可測，且つ Bochner 可積分とする。$\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ を増大（又は減少）する $\mathcal{B}$ の sub-σ-field とし　$\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_n$　（又は $\mathcal{F}_\infty = \bigcap \mathcal{F}_n$）とおく。

$x_n = \mathcal{E}^s(z \mid \mathcal{F}_n)$，$x_\infty = \mathcal{E}^s(z \mid \mathcal{F}_\infty)$　とすると

(1) $\int \|z(\omega)\| \, dP < \infty$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\| \, dP \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$P(\|x_n - x_\infty\| \to 0 \ (n \to \infty)) = 1$$

(2) $\int \|z(\omega)\|^p \, dP < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$ のとき

$$\int \|x_n - x_\infty\|^p \, dP \to 0 \quad (n \to \infty)$$

## §3 Application

以下，J. B. Walsh [4] による。$I$ を compact metizable な空間とし，$C(I)$ を $I$ 上の連続函数からなる Banach 空間とする。この時 $C(I)$-valued 確率変数 $X(\omega) \equiv X_0(t, \omega)$ $t \in I, \omega \in \Omega$ は $X(t, \omega)$ が $t$ を止めると可測のとき，$X(\omega)$ 自身強可測になる。

「定理」 $\{X_n(\omega)\}_{n \geq 1}$ を $C(I)$-valued 強可測確率変数列（即ち $I$ 上の連続な確率過程の列）とする。$X_n(\omega)$ は互に独立で $\int \| X_n(\omega) \| dP < \infty$，$\int X_n(\omega) dP = 0$ とする。このとき次の二つの条件は同値である。

(1) $\int \| X(\omega) \| dP < \infty$ であるような強可測確率変数 $X(\omega)$ が存在し $P(\lim_{n \to \infty} \| S_n(\omega) - X(\omega) \| = 0) = 1$.

(2) (1) と同じ条件の $X(\omega) \equiv X(t, \omega)$ が存在し

$$P\,(\lim S_n(t, \omega) = X(t, \omega) \quad \forall t \in I_0) = 1$$

が $I$ の可算 dense subset $I_0$ に対して成立する.

但し $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ である.

この定理は前節の最後の定理から容易に証明できる。この定理を用いると次の結果が得られる.

「例1」 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots$ を平均値 0 分散 1 の独立な確率変数列とする。$\{\varphi_j(u)\}_{j \geq 1}$ $(u \in [0, a])$ を $L^2([0, a]\, du)$ の

完全正規直交系とし $\Phi_j(t)=\int_0^t \varphi_j(u)du$ とおくと

$$(*)\quad B(t)=\sum \eta_j \Phi_j(t) \qquad t\in[0,a]$$

は Brown 運動である。(*)の右辺は各 $t$ 毎に概収束しており、

$B(t)\in C[0,a]$, $E(\|B(t)\|)<\infty$ はわかっているから

$$P\left(\sup_{0\le t\le a}\left|\sum_{j=1}^{N}\Phi_j(t)\eta_j(\omega)-B(t,\omega)\right|\to 0\ (n\to\infty)\right)=1$$

がわかる。

「例2」 Brown 運動 $B(t)$ に対して

$$\mathcal{F}_n=\sigma\{B(0),B(\tfrac{1}{2^n}),\cdots,B(\tfrac{k}{2^n}),\cdots,B(1)\}$$

とおく。$f_n(t)=E(B(t)|\mathcal{F}_n)$ は Brown 運動の折れ線による近似である。前節の最後の定理を用いると

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|f_n(t)-B(t)|\to 0\ (n\to\infty)\right)=1$$

がわかる。

## 文献


[1] Scalora : Abstruct martingale convergence theorem ; Pacific Jour. of Math 11. (1961)

[2] A. and I. Ionescu Tulcea : Abstract ergodic theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963)

[3] J. Neveu : Relations entre la théorie des martingales et la théorie ergodique , Ann. Inst. Fourier 15 (1965)

[4] J. B. Walsh : A note on uniform convergence of stochastic processes, Proc. Amer. Math. Soc. (1967)